SOURCE Algèbre 1, FGN

Recasages
- 190 combinatoire
- 241 Suite et series de fonctions
- 243 Series entières
- (230 Series de nb réels)

Énoncé

Def : Soit A un ensemble. $\{A_1, \ldots, A_k\}$ est une partition de A si $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Étapes

On pose $B_0 = 1$

1. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$
2. $f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} y^n$ est bien définie sur $[-1, 1]$
3. $\forall y \in]-1, 1[$, $f(y) = e^{e^y - 1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$

On pose $B_0 = 1$

Étape 1 Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $E_k = \{ \{A_1 \dots A_s\}$ partitions de $[\![1, n+1]\!]$ tq $n+1 \in A_i \Rightarrow \# A_i = k+1 \}$ ensembles des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ tq $n+1$ est dans un bloc de taille $k+1$

Les E_k forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$

Calculons $\# E_k$

- Pour construire A_i contenant $n+1$ dans $\{A_1 \dots A_s\} \subset E_k$ il faut choisir k éléments dans $[\![1, n]\!]$ et ajouter $n+1$
- Pour construire le reste des A_j on fait une partition de $[\![1, n-k]\!]$ (quitte à renuméroter)

Donc $\# E_k = \binom{n}{k} B_{n-k} = \binom{n}{n-k} B_{n-k}$

Donc $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Étape 2 Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ (série génératrice exponentielle de B_n)

Montrons que son rayon de CV est $R \geq 1$

- Majorons B_n. Par réc on mq $B_n \leqslant n!$

$B_1 = 1 \leq 1!$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, Onq $\forall k \leq n$, $B_k < k!$

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!$

$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} k!$

$\leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant n! \sum_{k=0}^{n} 1 \leq (n+1)!$

- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$. Par le critère de d'Alembert, le rayon de CV de f est au moins 1

Donc f définie sur $]-1, 1[$

③ $f(y) = e^{e^y - 1}$ $\forall y \in [-1, 1]$

$\forall y \in]-R, R[$ $f(y) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} y^{n+1}$

f est dérivable sur $]-R, R[$ avec $f'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} y^n$

Donc $f'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) y^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} \right) y^n$$

Or $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}}_{\substack{\text{Ray de } R \\ f(y)}} \times \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}}_{\substack{\text{Ray de } \infty \\ e^y}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \times \left(\sum_{k+j=n} \frac{1}{j!} \frac{B_k}{k!} \right)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!}$$

Donc $f'(y) = e^y f(y)$ $\forall y \in [-R, R]$

Les solutions de cette équation différentielle sont $f(y) = Ce^{e^y}$ avec $C \in \mathbb{R}$

en évaluant en 1 on obtient :

$$f(y) = \frac{1}{e} e^{e^y} = e^{e^y - 1}$$

④ Calculons B_n

• e^x est DSE $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $e^{e^y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{ny}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ny)^k}{k!}$

Posons $u_{n,k} = \frac{(ny)^k}{n!\, k!}$, $(u_{n,k})$ à termes ≥ 0

À n fixé $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|ny|^k}{n!\, k!} = \frac{e^{|ny|}}{n!}$ $(u_{n,k})_k$ intégrable pour mesure comptage

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|ny|}}{n!} = e^{e^{|y|}} \text{ donc intégrable}$$

Donc on peut échanger l'ordre des sommations par Fubini

Donc $f(y) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{y^k}{k!}$

Par unicité du DSE :

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$